

Общее про аннуитет

Смотри в этой шпаргалке

Платежи и начисления %

S - наращенная стоимость

P - дисконтированная стоимость

R - аннуитетный платеж

i - процентная ставка

n - срок ренты (лет)

p - количество аннуитетных платежей в году

m - количество начислений % в году

Аннуитет постнумерандо

p=1; m>1

$$S_{\text{post}} = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1}$$

$$P_{\text{post}} = R \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{m}}\right)^{n \cdot m}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1}$$

p>1; m=1

$$S_{\text{post}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{n}{p}} - 1}$$

$$P_{\text{post}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$$

p>1; m>1; m=p

$$S_{\text{post}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}{\frac{i}{m}}$$

$$P_{\text{post}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{m}}\right)^{n \cdot m}}{\frac{i}{m}}$$

В знаменателе должно стоять выражение $(1+i/m)^{m/p} - 1$, но, т.к. $m=p$, то скобка будет в степени 1, значит $1+i/m - 1 = i/m$

p>1; m>1; m≠p

$$S_{\text{post}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$P_{\text{post}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{m}}\right)^{n \cdot m}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

C

By **Blodwyn** (Blodwyn)
cheatography.com/blodwyn/

Published 24th August, 2024.
Last updated 24th August, 2024.
Page 1 of 9.

Sponsored by **ApolloPad.com**
Everyone has a novel in them. Finish Yours!
<https://apollopad.com>

Аннуитет пренумерандо

$p=1; m>1$

$$S_{pre} = S_{post} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

S_{post} и P_{post} также вычисляем по формулам для $p=1; m>1$

$p>1; m=1$

$$S_{pre} = S_{post} \cdot \left(1 + i\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot \left(1 + i\right)^{\frac{1}{p}}$$

S_{post} и P_{post} также вычисляются по формулам для $p>1; m=1$

$p>1; m>1; m=p$

$$S_{pre} = S_{post} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

$m=p$, поэтому скобка $(1+i/m)^{m/p}$ превращается в $(1+i/m)^1$

$p>1; m>1; m \neq p$

$$S_{pre} = S_{post} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

$$P_{pre} = P_{post} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

C

By **Blodwyn** (Blodwyn)
cheatography.com/blodwyn/

Published 24th August, 2024.
Last updated 24th August, 2024.
Page 2 of 9.

Sponsored by **ApolloPad.com**
Everyone has a novel in them. Finish Yours!
<https://apollopapad.com>

Выплаты в середине периода

Аннуитет постнумерандо "сдвигаем" на 1/2 периода назад, домножая аннуитет постнумерандо на доп. множитель

$p=1; m=1$

$$S' = S_{\text{post}} \cdot (1+i)^{\frac{1}{2}}$$

$p>1; m=1$

$$S' = S_{\text{post}} \cdot (1+i)^{\frac{1}{2p}}$$

$p=1; m>1$

$$S' = S_{\text{post}} \cdot (1+\frac{i}{m})^{\frac{m}{2}}$$

$p>1; m>1$

$$S' = S_{\text{post}} \cdot (1+\frac{i}{m})^{\frac{m}{2p}}$$

!

Для вычисления дисконтированной стоимости аналогично умножаем P_{post} на соответствующую скобку в зависимости от условий p и m

C

By **Blodwyn** (Blodwyn)
cheatography.com/blodwyn/

Published 24th August, 2024.
Last updated 24th August, 2024.
Page 3 of 9.

Sponsored by **ApolloPad.com**
Everyone has a novel in them. Finish Yours!
<https://apollopad.com>

Непрерывное начисление %

Аннуитет постнумерандо

$$S_{\text{post}} = R \cdot \frac{e^{in} - 1}{e^i - 1}$$

$$P_{\text{post}} = R \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e^i}\right)^n}{e^i - 1}$$

Аннуитет пренумерандо

$$S_{\text{pre}} = S_{\text{post}} \cdot e^i$$

$$P_{\text{pre}} = P_{\text{post}} \cdot e^i$$

p-срочная рента

$$S_{\text{post}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{in} - 1}{e^{\frac{i}{p}} - 1}$$

$$P_{\text{post}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e^i}\right)^n}{e^{\frac{i}{p}} - 1}$$

$$S_{\text{pre}} = S_{\text{post}} \cdot e^{\frac{i}{p}}$$

$$P_{\text{pre}} = P_{\text{post}} \cdot e^{\frac{i}{p}}$$

C

By **Blodwyn** (Blodwyn)
cheatography.com/blodwyn/

Published 24th August, 2024.
Last updated 24th August, 2024.
Page 4 of 9.

Sponsored by **ApolloPad.com**
Everyone has a novel in them. Finish
Yours!
<https://apollopad.com>

Период платежей более года

Члены ренты выплачиваются с интервалами $g > 1$ года

g - период ренты, платежи осуществляются **1 раз в несколько лет**

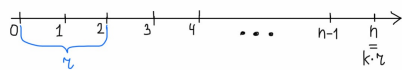
Это похоже на p , когда платежи осуществляются несколько раз за 1 год

Сравнение g и p

продолжительность периода ренты	g лет	$1/p$ лет
		365/p дней
кол-во периодов ренты	n/g	$n \cdot p$
кол-во платежей за год	$1/g$	p

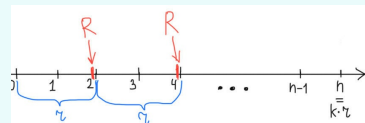
$1/g$ платежей за год $\rightarrow$ платеж осуществляется 1 раз в несколько лет, значит, за один год осуществляется всего $1/g$ часть платежа

Наглядно



Для удобства примем, что n кратно g .
Т.е. n -ый год - это конец срока ренты и одновременно последний год, входящий в последний период g . В момент конца n -ого года заканчивается и последний период g .

Аннуитет постнумерандо

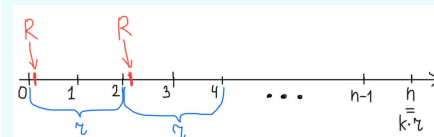


$$S_{\text{post}} = R \cdot v \cdot (1+i)^{n-g} + R \cdot v \cdot (1+i)^{n-2g} + \dots + R \cdot v \cdot (1+i)^g + R \cdot v = R \cdot v \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^g - 1} = R \cdot v \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^g - 1}$$

$$P_{\text{post}} = \frac{R \cdot v}{(1+i)^g} + \frac{R \cdot v}{(1+i)^{2g}} + \dots + \frac{R \cdot v}{(1+i)^{(n/g-1)g}} + \frac{R \cdot v}{(1+i)^n} = \frac{R \cdot v}{(1+i)^g} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^g - 1} = R \cdot v \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^g - 1} = R \cdot v \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-g}}$$

$R \cdot g \rightarrow$ поскольку R - это **годовой платеж**, а период ренты g - несколько лет
Если по условию задачи R - платеж за период g , то R умножать на g не нужно

Аннуитет пренумерандо

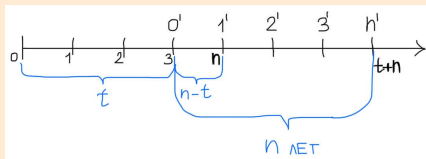


$$S_{\text{pre}} = S_{\text{post}} \cdot (1+i)^g$$

$$P_{\text{pre}} = P_{\text{post}} \cdot (1+i)^g$$

S_{post} и P_{post} также рассчитываются по соответствующим формулам ренты с периодом ренты g

Отложенная рента



Рента, которая начинает выплачиваться через t лет после некоторого начального периода времени

Важно

Такой сдвиг во времени:

★ **не влияет** на величину **наращенной** суммы -> от сдвига начала ренты сам период, в течение которого наращиваются %, не изменится, а просто сдвинется вперёд

★ **влияет** на величину **дисконтированной** суммы -> сдвиг начала ренты приведет к увеличению периода, за который дисконтируется рента, на величину t (время отсрочки ренты) -> теперь мы дисконтируем ренту за $n+t$ лет (а не n лет).

Формула

$$P_t = \frac{P}{(1+i)^t}$$

Подходит и для аннуитета постнумерандо, и для аннуитета пренумерандо

C

By **Blodwyn** (Blodwyn)
cheatography.com/blodwyn/

Published 24th August, 2024.
Last updated 24th August, 2024.
Page 6 of 9.

Sponsored by **ApolloPad.com**
Everyone has a novel in them. Finish Yours!
<https://apollopad.com>

Начисление простых %

Особенность ренты: % за период начисляются лишь на основной (инвестированный) капитал, т.е. % не реинвестируются.

Формулы выводятся на основе **арифметической прогрессии**.

Арифметическая прогрессия

Это последовательность, в которой каждый последующий член можно найти, если к предыдущему члену прибавить одно и то же число

Параметры прогрессии

a_1 - первый член арифметической прогрессии

a_n - n-ый член арифметической прогрессии

d - число, которое последовательно прибавляется к каждому последующему члену прогрессии

n-ый член прогрессии

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$$

К a_1 еще не прибавляется d

d прибавляется к **каждому из оставшихся** $(n-1)$ членов прогрессии

Сумма прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + \overbrace{a_1 + d \cdot (n-1)}^{a_n}}{2} \cdot n$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Наращенная сумма

$$S_{post} = R \cdot (1+i \cdot (n-1)) + R \cdot (1+i \cdot (n-2)) + \dots + R \cdot (1+i) + R$$

$$a_1 = R; d = R \cdot i; a_n = R + R \cdot i \cdot (n-1)$$

$$S_{post} = \frac{R + R + R \cdot i \cdot (n-1)}{2} \cdot n = R \cdot n \cdot \left[1 + \frac{i \cdot (n-1)}{2} \right]$$

Аннуитет постнумерандо

Дисконтированная сумма

$$P_{post} = \frac{R}{(1+i \cdot 1)} + \frac{R}{(1+i \cdot (n-1))} + \dots + \frac{R}{1+i} = \sum_{t=1}^n \frac{R}{(1+i \cdot t)}$$

Аннуитет постнумерандо

Банк. дисконтирование

$$\begin{aligned} P_{\text{post BANK.}} &= R \cdot (1-d \cdot 1) + R \cdot (1-d \cdot (n-1)) + \dots + R \cdot (1-d \cdot n) = \\ &= \sum_{t=1}^n R \cdot (1-d \cdot t) \\ a_1 &= R - R \cdot d; a_n = R - R \cdot d - R \cdot d \cdot (n-1) \\ P_{\text{post}} &= \frac{R - R \cdot d + R - R \cdot d - R \cdot d \cdot (n-1)}{2} \cdot n = \\ &= \frac{2R - 2R \cdot d - n \cdot R \cdot d + R \cdot d}{2} \cdot n = \\ &= \frac{2R - R \cdot d \cdot (1+n)}{2} \cdot n = \\ &= R \cdot n \cdot \left[1 - \frac{d \cdot (1+n)}{2} \right] \end{aligned}$$

Банковское дисконтирование - должнику в начале срока выдается сумма, уменьшенная на сумму процентов (т.е. сумма с дисконтом (скидкой) d), а возврату в конце срока подлежит полная сумма.

Переменная рента

Рента, при которой размеры членов ренты изменяются во времени

Случай 1

Абсолютное изменение платежей в потоке

Члены ренты образуют арифметическую прогрессию:

$R; R+a; R+2a; \dots; R+a \cdot (n-1)$

Каждый последующий член ренты увеличивается на одно и то же число a

$p=1; m=1$

$$S_{\text{post}} = \left(R + \frac{a}{i}\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{ha}{i}$$

$$P_{\text{post}} = \left(R + \frac{a}{i}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i} - \frac{ha \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i}$$

$p>1; m=1$

$$S_{\text{post}} = \sum_{t=1}^{n \cdot p} \frac{R + a \cdot (t-1)}{p} \cdot (1+i)^{n \cdot \frac{t}{p}}$$

$$P_{\text{post}} = \sum_{t=1}^{n \cdot p} \frac{R + a \cdot (t-1)}{p} \cdot (1+i)^{-\frac{t}{p}}$$

Члены ренты: $R/p; (R+a)/p; (R+2a)/p; \dots; (R+(np-1)a)/p$.

Случай 2

Относительное изменение платежей в потоке

Члены ренты образуют геометрическую прогрессию:

$R; Rq; Rq^2; \dots; R \cdot q^{n-1}$

Каждый последующий член ренты больше предыдущего в q раз

$p=1; m=1$

$$S_{\text{post}} = R \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$$

$$P_{\text{post}} = R \cdot \frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{q - (1+i)}$$

$p>1; m=1$

$$S_{\text{post}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{q^{n \cdot p} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}}$$

$$P_{\text{post}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\frac{q^{n \cdot p}}{(1+i)^n} - 1}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}}$$

Члены ренты: $R/p; (R/p)q; (R/p)q^2; \dots; (R/p)q^{p-1}$

Случай 3

Разовые изменения платежей в потоке

Принцип вычисления

Наращенная и дисконтированная стоимость определяется путем прямого счета

C

By Blodwyn (Blodwyn)
cheatography.com/blodwyn/

Published 24th August, 2024.
Last updated 24th August, 2024.
Page 8 of 9.

Sponsored by **ApolloPad.com**
Everyone has a novel in them. Finish Yours!

<https://apollopadd.com>

Вечная рента

Платежи по ренте осуществляются в течение **неограниченного срока** (бесконечно)

Пример: вы хотите положить на вклад в банк такую сумму, чтобы при фиксированной годовой % ставке регулярно получать R руб./год в течение неограниченного срока в будущем.

Чтобы узнать, сколько первоначально положить в банк на вклад, используем формулу вечной ренты.

Будущая стоимость ренты

Нет смысла вычислять, т.к. платежи по ренте осуществляются в течение неограниченного срока

Настоящая стоимость

$$P = \frac{R}{i}$$

Поздравляю!



Ты дошел(-ла) до конца. Ты смелый котик.